

Untersuchung der Dynamowirkung einer nichtspiegelsymmetrischen Turbulenz an einfachen Modellen

F. KRAUSE und M. STEENBECK

Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Institut für Magnetohydrodynamik in Jena

(Z. Naturforschg. **22 a**, 671—675 [1967]; eingegangen am 3. Februar 1967)

A turbulent conducting fluid is considered. In the case of homogeneous, isotropic turbulence with no reflection symmetry OHM's law for the global fields reads $\mathbf{i} = \sigma(\mathfrak{E} + \alpha \mathfrak{B})$, $\alpha = \text{const.}$ Evidence is given for dynamo maintenance of the electromagnetic fields by solving the equations of two simple models: The turbulent motion takes place in a sphere, which is embedded in a nonconducting space in the first case and in a conducting space with the same conductivity in the second case.

1. Einleitung

In zwei vorangehenden Arbeiten¹, im folgenden mit (I) und (II) zitiert, wurde ein magnetohydrodynamischer Dynamo nachgewiesen, der mit Sicherheit in den meisten Himmelskörpern wirksam wird. Er hat seine Grundlage in Induktionseffekten, die von einer nichtspiegelsymmetrischen Turbulenz hervorgerufen werden.

In (II) wurde das Ziel verfolgt, in zwar noch ziemlich groben, aber doch stark an die Realität angenäherten Modellen aufzuzeigen, daß mit Hilfe dieses Mechanismus die Magnetfelder von Fixsternen und Planeten erklärt werden können. Ein Näherungsverfahren, das eine Behandlung durch analytische Ausdrücke ermöglichte, wurde für die Diskussion der verschiedenen Lösungstypen entwickelt.

Diese Modelle zu verfeinern und damit über die eingehenden Materialgrößen aus den vielfältigen Beobachtungsergebnissen Aufschluß über innere Strukturen von Fixsternen und Planeten zu bekommen, ist eine Aufgabe für eine elektronische Rechenmaschine. Es ist aber andererseits durchaus wichtig, nach einfachen Modellen zu suchen, die zwar zunächst wenig mit etwas Realisierbarem zu tun haben, dafür aber den Vorteil der Möglichkeit einer vollständigen mathematischen Durchdringung bieten.

Solche Modelle sind einmal vom pädagogischen Standpunkt interessant, da das Prinzipielle gut herausgearbeitet werden kann: In (II) wurde die Dynamowirkung durch Betrachtung des Ringmodells in Evidenz gesetzt; hier finden sich nun näher an der Realität gelegene, direkt rechenbare Modelle. Zum anderen können sie die Grundlage für qualitative

Überlegungen an topologisch ähnlichen Modellen sein; der Vergleich der Eigenwerte von (II) mit den hier erzielten Ergebnissen zeigt, daß auch Abschätzungen der Größenordnung möglich sind. Schließlich liefern sie Gewißheit über die Existenz der Lösungen, die von den in (II) angewandten Methoden nicht geliefert werden kann, da dort ein Konvergenzbeweis nicht ohne weiteres zu erbringen ist. Die Angabe geschlossener Lösungen für verwandte, aber einfachere Probleme unterstützt die Überzeugung, daß eine weitere Fortführung der Reihenentwicklungen in (II) an den Resultaten jedenfalls nichts Wesentliches ändern wird.

Wir setzen für das Medium, in dem wir die elektromagnetischen Erscheinungen untersuchen, die Gültigkeit eines OHmschen Gesetzes von der Form

$$\mathbf{i} = \sigma(\mathfrak{E} + \alpha \mathfrak{B}), \quad \alpha = \text{const.} \quad (1)$$

voraus; \mathfrak{E} bezeichnet die elektrische Feldstärke, \mathbf{i} die Stromdichte, \mathfrak{B} die magnetische Induktion und σ die Leitfähigkeit. Ein solches OHmsches Gesetz ist exakt gültig für die globalen Feldgrößen in einem fluiden, elektrisch leitendem Medium, falls in diesem eine homogene, isotrope, nichtspiegelsymmetrische Turbulenz vorliegt².

Es werden hier die geschlossenen Lösungen für zwei stationäre Probleme angegeben: Das OHmsche Gesetz (1) sei gültig im Inneren einer Kugel. Im ersten Fall sei diese Kugel in einen nichtleitenden Außenraum eingebettet und im zweiten Fall in ein leitendes Medium von der gleichen Leitfähigkeit.

Die in (II) benutzten Bezeichnungen behalten wir bei. Wir teilen also das Magnetfeld \mathfrak{S} in einen poloidalen und einen toroidalen Anteil auf, $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{\text{pol}}$

¹ (I) M. STEENBECK, F. KRAUSE u. K.-H. RÄDLER, Z. Naturforschg. **21 a**, 369 [1966]; (II) M. STEENBECK u. F. KRAUSE, Z. Naturforschg. **21 a**, 1285 [1966].

² M. STEENBECK u. F. KRAUSE, Magnitnaja Gidrodinamika [1967], im Druck. — F. KRAUSE, IV. Consultation on Heliphsics and Hydromagnetics, Sopot 1966, im Druck.



+ $\mathfrak{S}_{\text{tor}}$, und führen für den poloidalen Anteil das toroidale Vektorpotential \mathfrak{A} gemäß $\mathfrak{S}_{\text{pol}} = R \text{rot } \mathfrak{A}$ ein; R bezeichnet den Radius der Kugel.

Schließlich führen wir ein Polarkoordinatensystem r, ϑ, φ ein; bei den beiden Feldern \mathfrak{A} und $\mathfrak{S}_{\text{tor}}$ sind nur die φ -Komponenten von Null verschieden; sie werden mit $A(x, \vartheta)$ bzw. $H(x, \vartheta)$ bezeichnet; x bedeutet den normierten Mittelpunktsabstand $r = xR$.

2. Allgemeine Lösung der Feldgleichungen

Im stationären Fall ist die elektrische Feldstärke ein Gradientenfeld, also $\mathfrak{E} = -\text{grad } U$. Unter der Voraussetzung der Zylindersymmetrie fehlt dann die toroidale Komponente, und es folgt aus (1) mit $i_{\text{tor}} = \text{rot } \mathfrak{S}_{\text{pol}} = -R \Delta \mathfrak{A}$.

$$-\Delta \mathfrak{A} = \mu \sigma \alpha \mathfrak{S}_{\text{tor}}. \quad (2)$$

Bilden wir vom toroidalen Anteil der Gl. (1) die Rotation, so folgt mit $i_{\text{pol}} = \text{rot } \mathfrak{S}_{\text{tor}}$

$$-\Delta \mathfrak{S}_{\text{tor}} = -\mu \sigma \alpha R \Delta \mathfrak{A}. \quad (3)$$

Aus (2) und (3) können wir das Vektorfeld \mathfrak{A} eliminieren und erhalten eine Gleichung für das toroidale Feld allein

$$\Delta \mathfrak{S}_{\text{tor}} - (4C^2/R^2) \mathfrak{S}_{\text{tor}} = 0, \quad C = \mu \sigma \alpha R/2. \quad (4)$$

Gleichung (4) lautet explizit in Polarkoordinaten

$$\frac{1}{x} \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} H + \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial H \sin \vartheta}{\partial \vartheta} \right) + 4C^2 H = 0. \quad (5)$$

Mit dem Separationsansatz $H = \varphi(x) \chi(\vartheta)$ erhalten wir die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{1}{x} \frac{d^2 x}{dx^2} \varphi(x) - \frac{n(n+1)}{x^2} \varphi(x) + 4C^2 \varphi(x) = 0; \quad (6)$$

$$(1-u^2) \frac{d^2 \chi}{du^2} - 2u \frac{d\chi}{du} + \left\{ n(n+1) - \frac{1}{1-u^2} \right\} \chi = 0; \quad (7)$$

dabei wurde $\cos \vartheta = u$ gesetzt.

Gleichung (6) besitzt als Lösungen die mit $1/\sqrt{x}$ multiplizierten BESSEL-Funktionen der Ordnungen $\pm(n+1/2)$, Gl. (7) die zugeordneten LEGENDRESchen Polynome $P_n^1(u)$. Damit erhalten wir für das toroidale Feld

$$H(x, \vartheta) = \left\{ h_n \frac{1}{\sqrt{x}} J_{n+1/2}(2Cx) + h_n' \frac{1}{\sqrt{x}} J_{-n-1/2}(2Cx) \right\} P_n^1(\cos \vartheta). \quad (8)$$

Das Feld $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} - (1/2C) \mathfrak{S}_{\text{tor}}$ genügt nach (3) der Gleichung $\Delta \mathfrak{A}' = 0$, wir werden also auf die Gl. (5)

bzw. (6) mit $C=0$ geführt, während (7) unverändert gültig bleibt. (6) besitzt für $C=0$ die Lösungen x^n und x^{-n-1} , so daß wir für $A(x, \vartheta)$ erhalten

$$A(x, \vartheta) = \left\{ a_n x^n + a_n' x^{-n-1} + \frac{1}{2C} h_n \frac{1}{\sqrt{x}} J_{n+1/2}(2Cx) + \frac{1}{2C} h_n' J_{-n-1/2}(2Cx) \right\} P_n^1(\cos \vartheta). \quad (9)$$

Unsere Lösung enthält vier Integrationskonstanten, die sich aus Regularitäts- und Randbedingungen bestimmen.

3. Kugel im Vakuum

Da keine Ströme austreten können, muß das toroidale Feld an der Oberfläche, also für $x=1$, verschwinden. Es gilt nach (8)

$$J_{n+1/2}(2C) = 0, \quad (10)$$

da wegen der bei $x=0$ zu fordernden Regularität h_n' verschwindet. (10) ist die Eigenwertgleichung für unser Problem. Es gibt zweifach unendlich viele Eigenwerte, einmal die unendlich vielen Wurzeln der Gl. (10) bei festem n , und dann kann n noch die ganzzahligen Werte ≥ 1 durchlaufen. Der betragsmäßig kleinste Eigenwert ist die kleinste positive Nullstelle der BESSEL-Funktion von der Ordnung $3/2$. $J_{3/2}(z)$ ist bekanntlich durch elementare Funktionen darstellbar, es gilt

$$J_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z \right). \quad (11)$$

C bestimmt sich also aus der Gleichung $\tan 2C = 2C$, welche den Wert

$$C = 2, 24 \ 68 \ \dots \quad (12)$$

als kleinste positive Wurzel besitzt.

Ebenfalls wegen der Regularität bei $x=0$ muß a_n' verschwinden. a_n bestimmt sich aus der Randbedingung, daß ein stetiger Anschluß an ein wirbelfreies Feld im Außenraum gewährleistet sein muß. Außen gilt also $\mathfrak{S} = \text{grad } U$ mit $\Delta U = 0$; folglich haben wir

$$U(x, \vartheta) = U_0 P_n(\cos \vartheta) / x^{n+1}. \quad (13)$$

Es folgt daraus

$$H_r(1, \vartheta) = -(n+1) U_0 P_n(\cos \vartheta), \quad (14)$$

$$H_\vartheta(1, \vartheta) = -U_0 P_n'(\cos \vartheta) \sin \vartheta = U_0 P_n^1(\cos \vartheta). \quad (15)$$

Andererseits gilt mit

$$A(x, \vartheta) = \psi_n(x) P_n^1(\cos \vartheta) \quad (16)$$

nach (II, 18)

$$\begin{aligned} H_r(1, \vartheta) &= \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \{ \psi_n(1) P_n^1(\cos \vartheta) \sin \vartheta \} \\ &= -\psi_n(1) \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \{ \sin^2 \vartheta P_n'(\cos \vartheta) \} \\ &= -\psi_n(1) n(n+1) P_n(\cos \vartheta); \end{aligned} \quad (17)$$

$$H_\vartheta(1, \vartheta) = -\{ \psi_n'(1) + \psi_n(1) \} P_n^1(\cos \vartheta). \quad (18)$$

Die Gln. (17) und (18) sind mit den Gln. (14) und (15) nur dann verträglich, wenn

$$\psi_n'(1) + (n+1) \psi_n(1) = 0. \quad (19)$$

Dieses ist die gesuchte zweite Randbedingung, der wir auch die Form

$$\frac{d}{dx} \{ x^{n+1} \psi_n(x) \}_{x=1} = 0 \quad (20)$$

geben können.

Setzen wir (9) mit $a_n' = h_n' = 0$ ein, so folgt

$$\begin{aligned} \frac{h_n}{(2C)^{n+1/2}} \frac{d}{d(2Cx)} \{ (2Cx)^{n+1/2} J_{n+1/2}(2Cx) \}_{x=1} \\ + a_n(2n+1) = 0. \end{aligned}$$

Nach der bekannten Formel

$$\frac{d}{dz} \{ z^v J_v(z) \} = z^v J_{v-1}(z)$$

ergibt sich

$$a_n = -\frac{h_n}{2n+1} J_{n+1/2}(2C). \quad (21)$$

Damit sind die beiden Feldanteile vollständig bestimmt; es gilt

$$H(x, \vartheta) = h_n \frac{1}{\sqrt{x}} J_{n+1/2}(2Cx) P_n^1(\cos \vartheta), \quad (22)$$

$$\begin{aligned} A(x, \vartheta) &= \frac{h_n}{2C} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x}} J_{n+1/2}(2Cx) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2C}{2n+1} J_{n+1/2}(2C) x^n \right\} P_n^1(\cos \vartheta). \end{aligned} \quad (23)$$

Das elektrische Feld kann über das OHMSche Gesetz (1) berechnet werden; daraus folgt

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{i} - \mu \alpha \mathfrak{H}. \quad (24)$$

Es besitzt für den hier behandelten stationären Fall nur einen poloidalen Anteil. Da wir μ , σ , α konstant voraussetzen, ist \mathfrak{E} sowohl innerhalb wie außer-

halb der Kugel wirbel- und quellenfrei, lediglich auf der Kugeloberfläche befinden sich Ladungen. Für das Potential gilt also

$$U(x, \vartheta) = \begin{cases} U_0 x^n P_n(\cos \vartheta), & x \leq 1, \\ U_0 x^{-n-1} P_n(\cos \vartheta), & x \geq 1. \end{cases} \quad (25)$$

Für E_r ergibt sich für $x=1$ nach (17), (23) und (24) der Wert

$$\begin{aligned} E_r(1, \vartheta) &= -\mu \alpha H_r(1, \vartheta) \\ &= -\frac{h_n}{2n+1} J_{n+1/2}(2C) n(n+1) P_n(\cos \vartheta), \end{aligned}$$

und andererseits aus (25)

$$E_r(1, \vartheta) = -U_0 n P_n(\cos \vartheta)/R.$$

Durch einen Vergleich erhalten wir

$$U_0 = \mu \alpha R \frac{n+1}{2n+1} J_{n+1/2}(2C) h_n. \quad (26)$$

Die Normalkomponente der elektrischen Feldstärke springt an der Kugeloberfläche entsprechend der dort vorhandenen Ladungen, deren Dichte proportional zu $P_n(\cos \vartheta)$ ist.

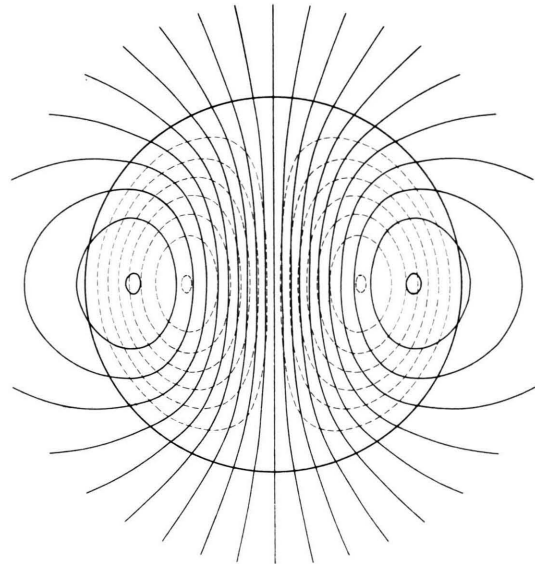


Abb. 1. Selbsterregtes Magnetfeld vom Dipoltyp für eine Kugel im Vakuum.
— Feldlinien des poloidalen Anteiles,
--- Linien konstanter Feldstärke des toroidalen Anteiles.

Für den Fall $n=1$ ist das elektrische Feld im Inneren der Kugel homogen und im Äußeren ein Dipolfeld; die Oberflächenladungsdichte ist proportional zu $\cos \vartheta$.

4. Kugel im leitenden Außenraum

Das Feld im Außenraum genügt den Gln. (2) und (3) mit $\alpha = 0$; also

$$\Delta \mathfrak{L} = \Delta \mathfrak{S} = 0. \quad (27)$$

Wie die Herleitung von $A(x, \vartheta)$ vor Gl. (9) zeigte, führt (27) im Außenraum auf die Lösungen

$$H^{(a)}(x, \vartheta) = h_n^{(a)} P_n^1(\cos \vartheta) / x^{n+1}, \quad (28)$$

$$A^{(a)}(x, \vartheta) = a_n^{(a)} P_n^1(\cos \vartheta) / x^{n+1}. \quad (29)$$

Das Innenfeld wird durch (8) und (9) für $a_n' = h_n' = 0$ gegeben. Die vier Konstanten bestimmen sich aus den Übergangsbedingungen; das Magnetfeld muß, stetiges μ vorausgesetzt, stetig durch die Diskontinuität hindurchgehen, die tangentialen Komponenten der elektrischen Feldstärke ebenfalls.

Die azitumale Komponente der elektrischen Feldstärke verschwindet in dem hier behandelten stationären Fall, also $E_\varphi = 0$. Dieser Sachverhalt ist bereits in den Gln. (2) bzw. in der äquivalenten Gleichung in (27) berücksichtigt, so daß uns nur noch die Stetigkeit von E_ϑ neue Bedingungen liefert. Nach dem OHMSchen Gesetz gilt

$$i_\vartheta^{(i)} = \sigma (E_\vartheta^{(i)} + \mu \alpha H_\vartheta^{(i)}), \quad (30)$$

$$i_\vartheta^{(a)} = \sigma E_\vartheta^{(a)}, \quad (31)$$

Hieraus ergibt sich die Übergangsbedingung

$$i_\vartheta^{(i)} - i_\vartheta^{(a)} = \mu \sigma \alpha H_\vartheta; \quad (32)$$

oder, indem wir i_ϑ aus (8) für den Innenraum und aus (28) für den Außenraum und H_ϑ aus (9) berechnen

$$n h_n^{(a)} = (n+1) 2 C a_n. \quad (33)$$

Die Stetigkeit der drei Magnetfeldkomponenten führt nach (8), (9) und (28), (29) auf die drei Bedingungen

$$h_n^{(a)} = h_n J_{n+1/2}(2C), \quad (34)$$

$$a_n^{(a)} = a_n + \frac{1}{2C} h_n J_{n+1/2}(2C), \quad (35)$$

$$-n a_n^{(a)} = (n+1) a_n + \frac{1}{2C} h_n \cdot \left\{ \frac{d}{dx} (x J_{n+1/2}(2C)) \right\}_{x=1}. \quad (36)$$

Die Kombination von (33) und (34) einerseits und von (35) und (36) andererseits liefert die beiden Gleichungen

$$2(n+1) C a_n - n J_{n+1/2}(2C) h_n = 0, \quad (37)$$

$$(n+1) a_n + J_{n-1/2}(2C) h_n = 0, \quad (38)$$

mit der Bedingung

$$2(n+1) C J_{n-1/2}(2C) + n(2n+1) J_{n+1/2}(2C) = 0 \quad (39)$$

für die Lösbarkeit, die für uns die Eigenwertgleichung zur Bestimmung des Eigenwertes C darstellt. Ersetzen wir a_n aus Gl. (37) durch h_n , so ist die Darstellung für das Innenfeld identisch mit der in (22) und (23) für die Kugel im Vakuum. Lediglich der Eigenwert C hat jetzt einen anderen numerischen Wert; für $n=1$ ergibt sich die Gleichung $\tan(2C) = 6(C/3) + 8C^2$ mit dem kleinsten Eigenwert

$$C = 1,75294. \quad (40)$$

Die Anregung ist hier also geringfügig leichter, da die Ströme nicht durch den im ersten Fall isolierenden Außenraum gezwungen werden, ganz im Inneren der Kugel zu fließen. An der Oberfläche der α -Kugel bildet sich wieder eine Oberflächenladung aus. Ihr Wert ist aus dem Potential (25) und (26) zu entnehmen, wobei C den geänderten Wert (40) besitzt.

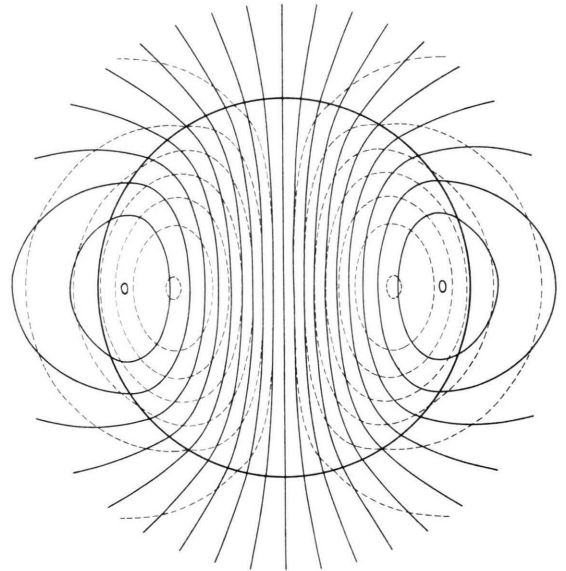


Abb. 2. Selbsterregtes Magnetfeld vom Dipoltyp für eine Kugel in leitender Umgebung.

— Feldlinien des poloidalen Anteiles,
--- Linien konstanter Feldstärke des toroidalen Anteils.

5. Eine Abschätzung für nichtkonstantes α

In (I) wurde ein Modell mit $\alpha = \alpha_0 \cos \vartheta$ behandelt; α hat also unterschiedliche Vorzeichen in den beiden Hemisphären. Wir versuchen, aus den hier

vorliegenden Rechnungen eine Abschätzung für die Eigenwerte zu gewinnen.

Wir betrachten zwei zunächst getrennt liegende Halbkugeln; α sei in jeder dieser Halbkugeln konstant; betragsmäßig seien die beiden Werte gleich, jedoch sollen sie entgegengesetztes Vorzeichen haben.

Jede Halbkugel baut für sich ein Feld vom Dipoltyp auf, das mit einem toroidalen Ringfeld gekoppelt ist; dabei ist bezogen auf die Orientierung des poloidalen Feldes das toroidale Ringfeld in den beiden Halbkugeln unterschiedlich orientiert (Abb. 3 a, 4 a). Eine Abschätzung der Anregungsbedingung für die Halbkugel führt nach (3) und (11) auf $\mu \sigma \alpha L/2 \approx 2,25$; falls L eine für die Dynamoanregung charakteristische Länge ist. Als solche kommt in erster Linie der Radius der größten, vollständig in die Halbkugel hineinpassenden Vollkugel in Frage, also $L = R/2$. Damit erhalten wir als Anregungsbedingung für eine Halbkugel von Radius R

$$\mu \sigma \alpha R/2 \approx 4,5. \quad (41)$$

Wir bauen nun aus diesen zwei Halbkugeln eine Vollkugel auf, die ein Feld vom Dipoltyp trägt

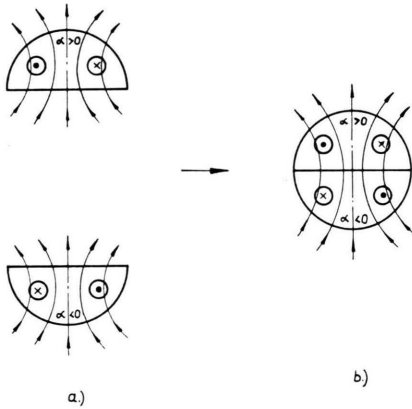


Abb. 3. Aufbau eines Feldes vom Dipoltyp für eine Vollkugel aus zwei Halbkugeln mit entgegengesetzten gleichem α .

(Abb. 3). Da die Felder der beiden Halbkugeln sich verstärken, ist zu erwarten, daß die Anregung für die Vollkugel mit $\alpha > 0$ in der einen und $\alpha < 0$ in der anderen Halbkugel etwas leichter sein wird als der Aufbau der Einzelfelder. Wir schließen auf die Anregungsbedingung für ein Feld vom Dipoltyp

$$\mu \sigma \alpha R/2 \gtrsim 4,5. \quad (42)$$

Nach einer analogen Überlegung ist zu erwarten, daß die Anregung für ein Feld vom Quadrupoltyp

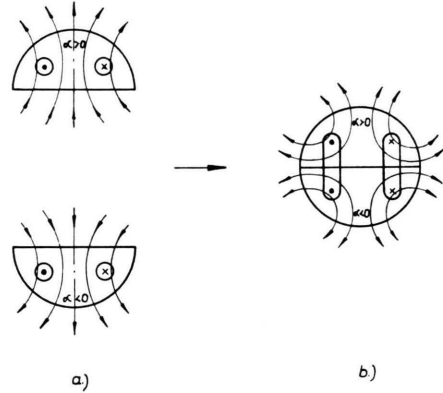


Abb. 4. Aufbau eines Feldes vom Quadrupoltyp für eine Vollkugel aus zwei Halbkugeln mit entgegengesetzten gleichem α .

insgesamt etwas schwerer ist, da sich die Feldanteile der beiden Halbkugeln beim Zusammenfügen schwächen (Abb. 4). Wir erhalten also als Anregungsbedingung für ein Feld vom Quadrupoltyp

$$\mu \sigma \alpha R/2 \gtrsim 4,5. \quad (43)$$

Die Untersuchung des Modells in (II) mit $\alpha = \alpha_0 \cos \vartheta$ führten auf die Anregungsbedingungen $\mu \sigma \alpha_0 R/2 = 4,13$ für ein Feld vom Dipoltyp (II, 38) und auf $\mu \sigma \alpha_0 R/2 = 4,81$ für ein Feld vom Quadrupoltyp (II, 44); beide Werte sind in guter Übereinstimmung mit den durch die Abschätzung gewonnenen.